РИП «Вычислительный эксперимент на уроках математики»

Симакова М.Н., учитель математики
Симаков Е.Е., учитель математики, информатики и ИКТ

Вычислительный эксперимент

Основная идея *вычислительного эксперимента* – замена исходного объекта математической моделью и дальнейшее изучение модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов.

Суть вычислительного эксперимента состоит в том, что на основе различных вариантов математических моделей с помощью компьютера проводятся исследования свойств объекта, процесса или системы, находятся их оптимальные параметры, уточняется математическая модель.

Вычислительный эксперимент позволяет получать и уточнять количественные характеристики исследуемого объекта, является орудием поиска неизвестных качественных закономерностей, присущих изучаемым объектам.

Технический цикл вычислительного эксперимента

- ***1-й этап.*** Построение математической модели объекта, отражающей его свойства.
- ***2-й этап.*** Разработка вычислительного алгоритма для реализации модели на компьютере.
- ***3-й этап.*** Проведение расчетов. Этот этап вычислительного эксперимента выполняется с помощью ИКТ.
- ***4-й этап.*** Анализ результатов.

При необходимости, корректировка математической модели и начало нового цикла вычислительного эксперимента.

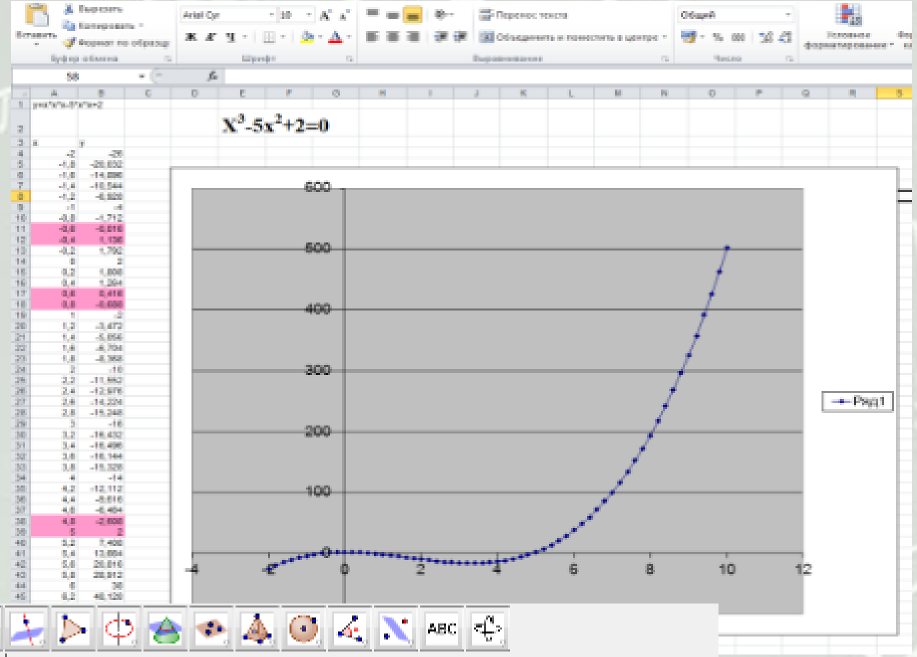
Возможности вычислительного эксперимента

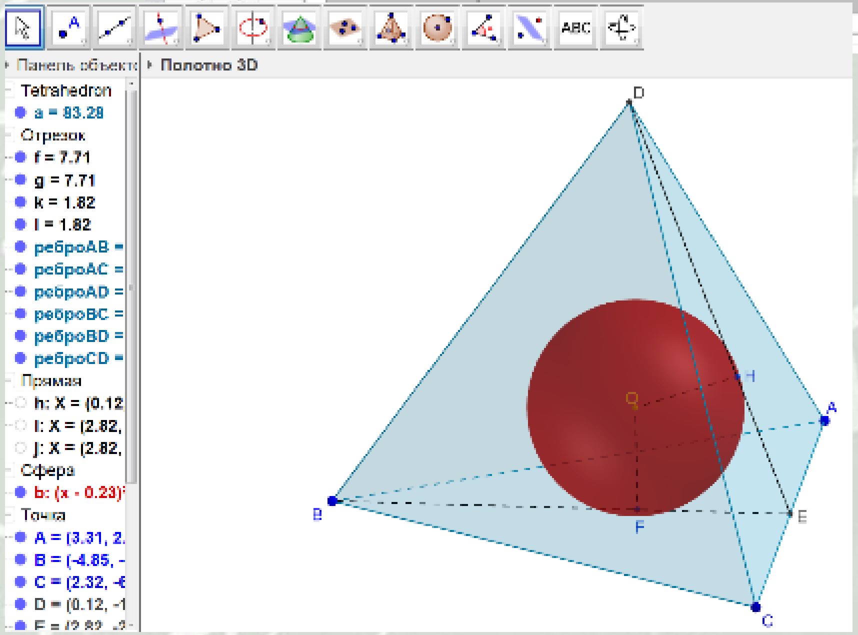
- Организация творческой, исследовательской деятельности учащихся.
- Реализация связи теории с практикой (основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, геометрической базой – прикладная математика).
- Изучение этапов математического моделирования: постановка проблемы и ее анализ, построение математической модели, исследование модели, изучение решения.
- Формирование алгоритмической культуры учащихся.
- Визуализация учебной информации, представление ее в виде графиков;
- Рассмотрение математических объектов в динамике, иллюстрация процесса изменения объектов с изменением значений параметров.
- Предоставление информации по использованию возможностей программы при решении математических задач вне школьных занятий.

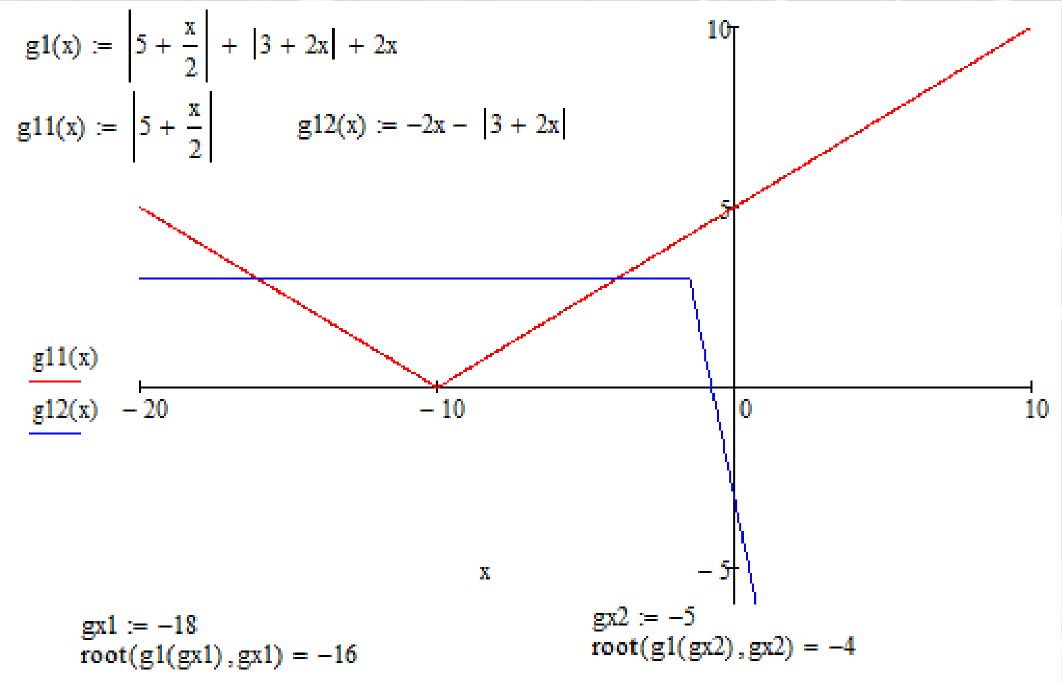
Программные комплексы

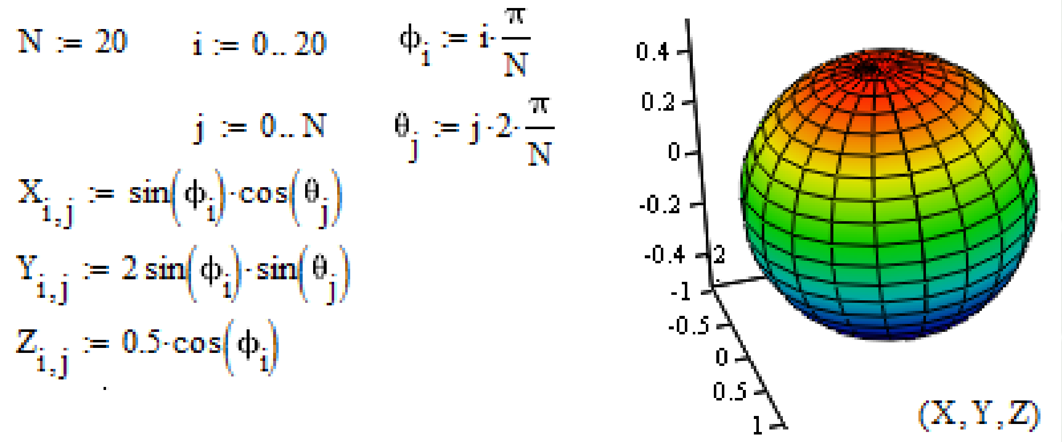
- ***MS Excel*** – табличный процессор, позволяющий строить графики и диаграммы, решать экономические задачи и задачи с параметром путем варьирования значений переменных;

- ***GeoGebra*** – динамическая геометрическая среда с широкими возможностями для построения и исследования графиков, стереометрических фигур и поверхностей, решения уравнений, неравенств и их систем, решения геометрических задач, а также задач теории вероятностей и математической статистики, прикладных задач;





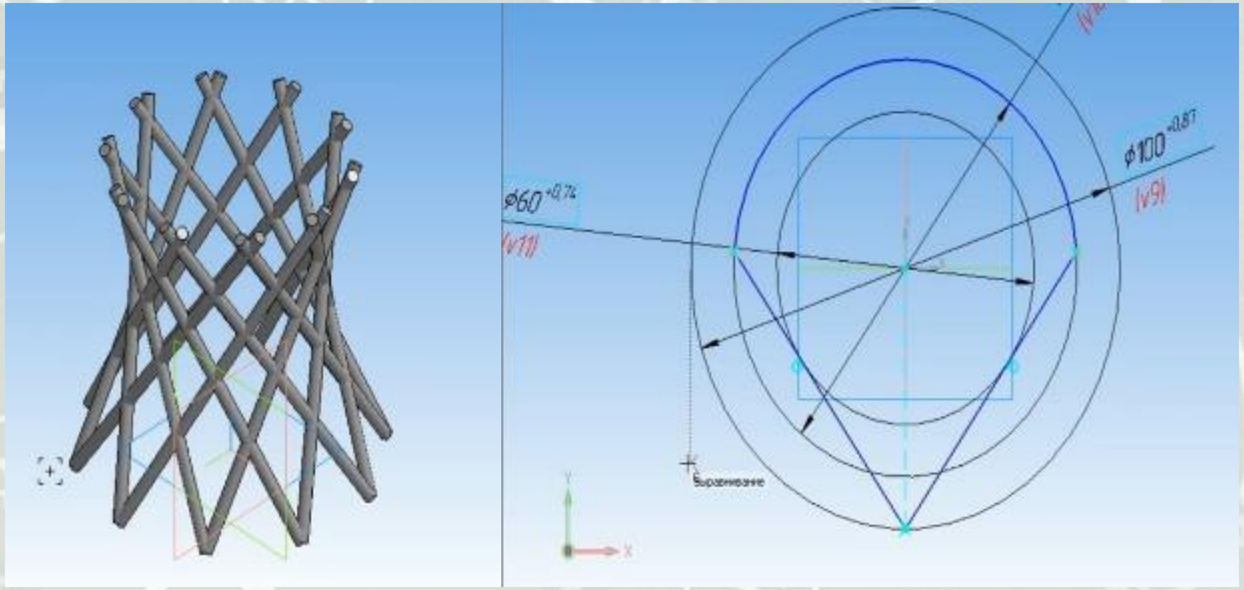


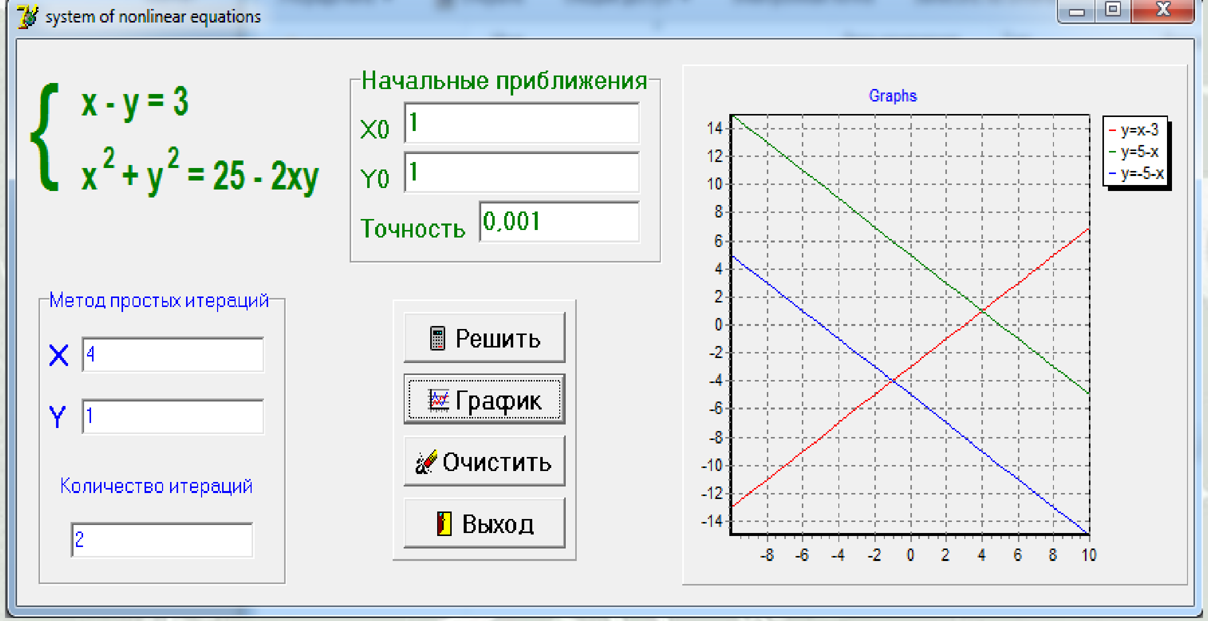


- ***MathCAD Prime 3.0*** **– система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования. Содержит сотни операторов и встроенных функций для решения различных технических задач. Среди возможностей MathCAD можно выделить:**

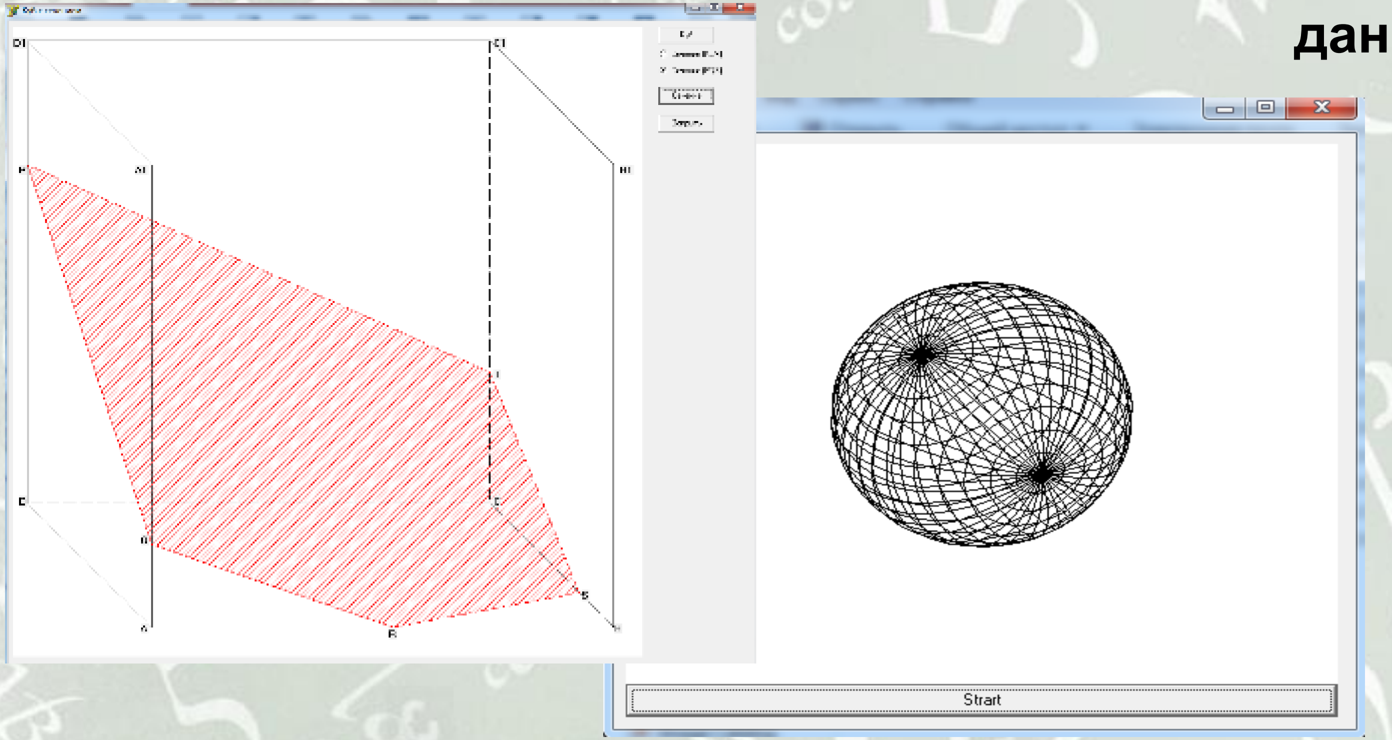
- ✓ **решение различных уравнений и систем, в том числе и численными методами;**
- ✓ **построение двумерных, трёхмерных графиков функций, графиков в полярной системе координат, контурных и векторных графиков;**
- ✓ **выполнение вычислений в символьном режиме для преобразования и упрощения выражений, а также решения задач в общем виде;**
- ✓ **выполнение операций с векторами и матрицами;**
- ✓ **аппроксимация кривых;**
- ✓ **проведение статистических расчётов и работа с распределением вероятностей.**

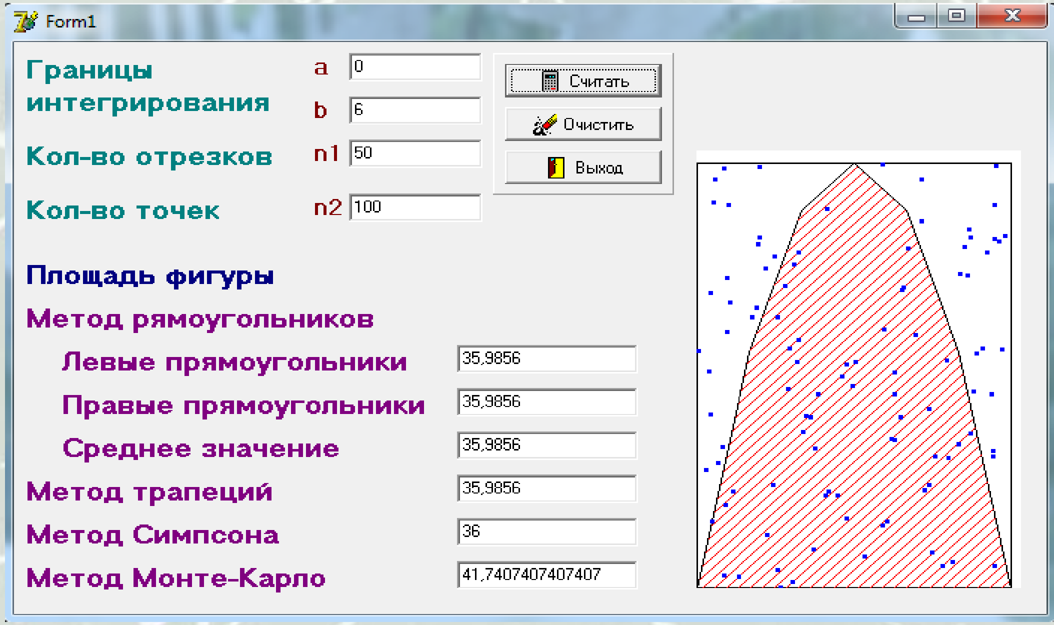
- ***Компас 3D LT*** – система автоматизированного проектирования, предназначенная для создания трёхмерных моделей объектов, инженерных деталей и сооружений. Многочисленные сервисные функции облегчают решение вспомогательных задач проектирования и обслуживания производства. Разработанные компьютерные модели могут быть реализованы с использованием технологии 3D-печати с целью их дальнейшего исследования.





- ***Lazarus (Delphi)*** **– среда разработки, позволяющая создавать приложения с визуальным интерфейсом для решения различных прикладных задач. Алгоритмы для решения конкретной задачи могут быть реализованы в виде программы на языке Object Pascal. Создаваемые таким образом приложения позволяют решать целый класс задач с различными входными данными.**



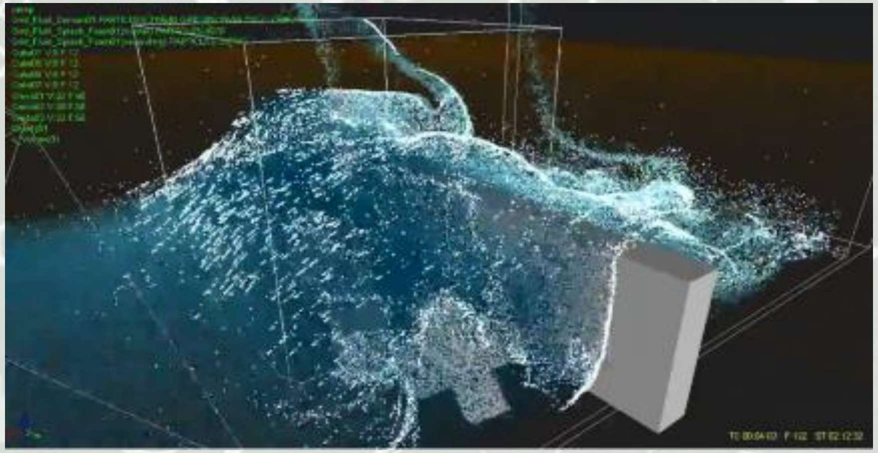


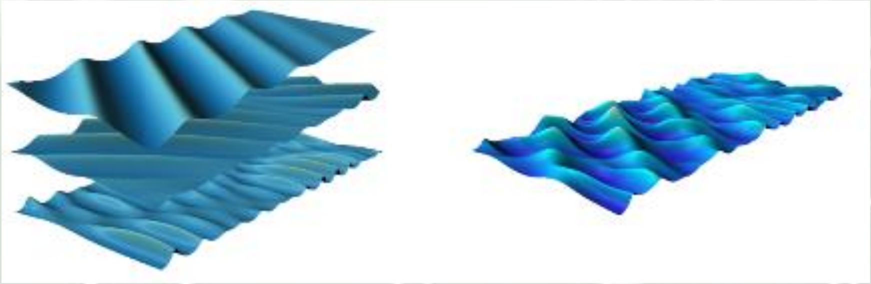
- ***LabVIEW*** – среда разработки на основе графического языка программирования G. Графический подход не требует знания синтаксиса языка и особенностей его использования. Разрабатываемые виртуальные приборы состоят из лицевой панели и блочной диаграммы.

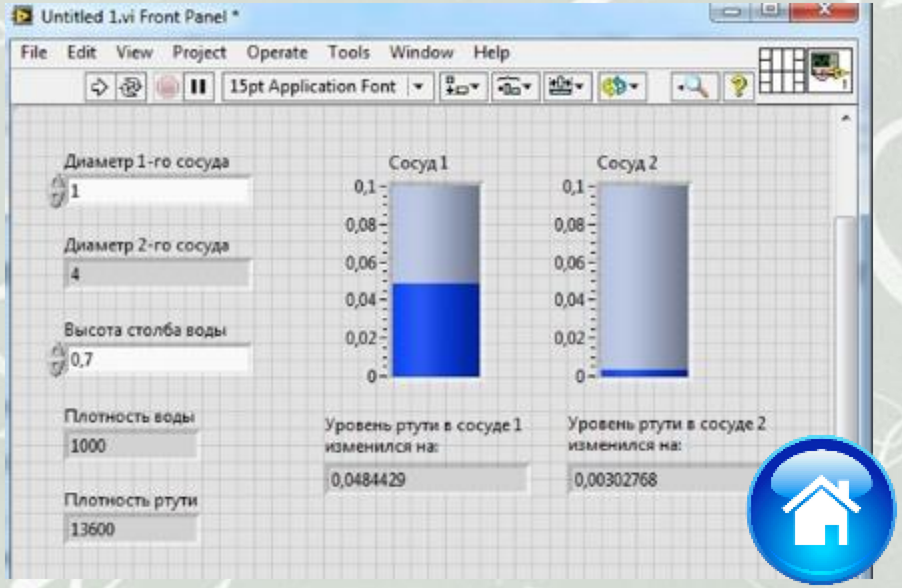
- ***RealFlow*** - компьютерная программа, предназначенная для моделирования и симуляции разнообразных физических тел в динамике. Способна моделировать твёрдые тела, деформируемые тела, жидкости, газы, специфические объекты, а также взаимодействия этих тел между собой. В основе лежит метод гидродинамики сглаженных частиц.

- ***Golden Software Surfer*** - система создания трехмерных карт, моделирования и анализа поверхностей. Мощные интерполяционные функции позволяют создавать точные поверхности высочайшего качества.

- ***Golden Software Grapher*** - графический пакет, позволяющий создавать графики одного из 54 типов.





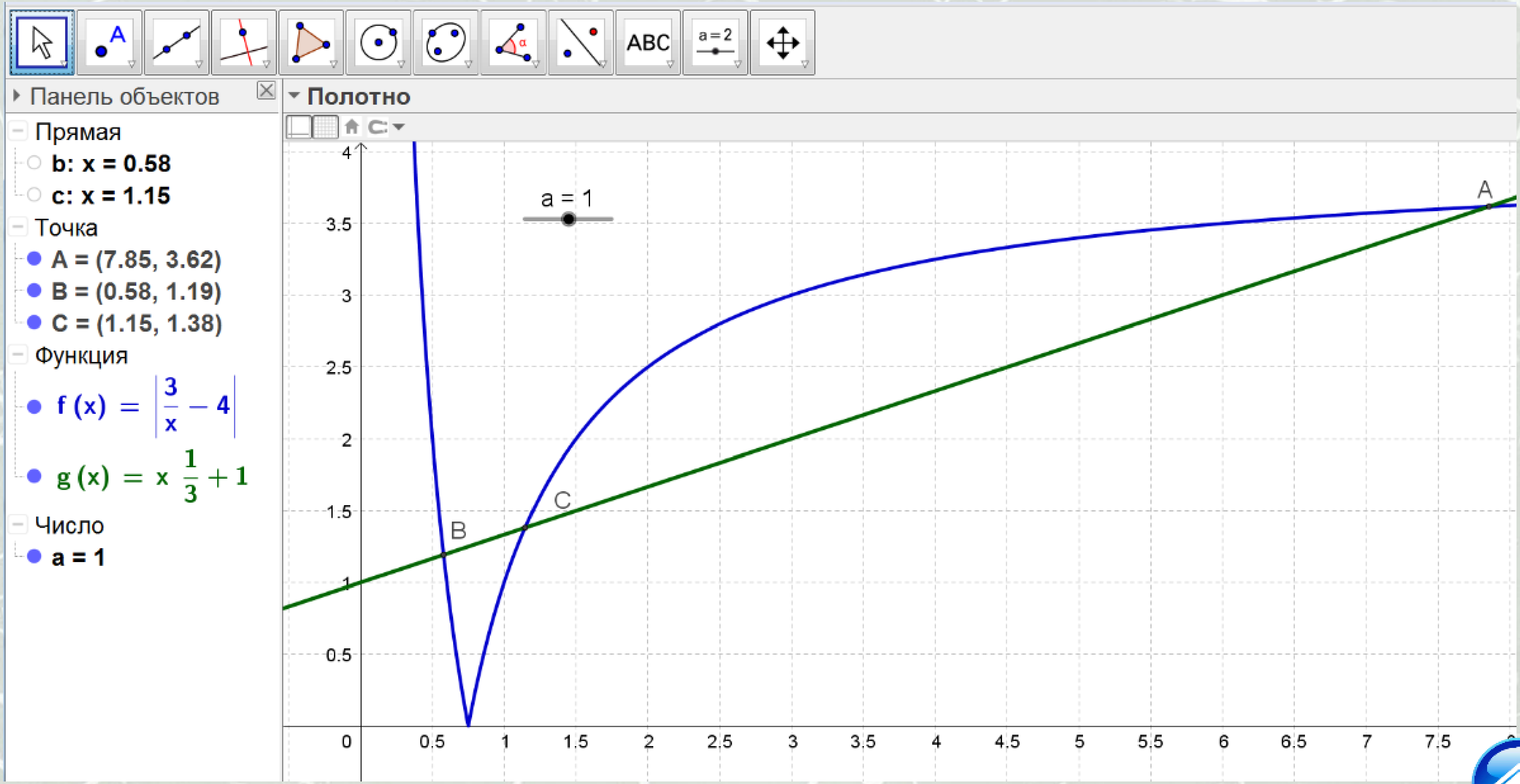


Задача 1. Решение уравнения с параметром.

Найти все целочисленные значения параметра a, при которых уравнение имеет более двух корней на интервале $(0;+\infty)$: $\left|\frac{3}{x}-4\right|=\frac{x\cdot a}{3}+1$.

1-й этап. Построение модели. **Зададим две функции f(x) и g(x), соответствующие левой и правой частям уравнения. Построим графики функций. Графики могут иметь или не иметь точки пересечения. Это зависит от значения параметра. Решение сводится к рассмотрению возможных вариантов расположения графиков.**

2-й этап. Разработка вычислительного алгоритма. **Количество точек пересечения графиков определяет количество корней заданного уравнения. Оно может изменяться при изменении параметра. Для изменения параметра создадим Ползунок, используя соответствующий инструмент среды GeoGebra.**


ABC
a = 2
Панель объектов
Прямая
b: x = 0.58
c: x = 1.15
Точка
A = (7.85, 3.62)
B = (0.58, 1.19)
C = (1.15, 1.38)
Функция
$f(x) = \left|\frac{3}{x} - 4\right|$
$g(x) = x\,\frac{1}{3} + 1$
Число
a = 1
Полотно
a = 1
A
B
C
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5

3-й этап. Проведение расчетов. **Рассмотрим несколько возможных вариантов расположения графиков при изменении параметра. Определим значения параметра, при которых графики пересекаются более, чем в 2 точках.**

4-й этап. Анализ результатов. **Исследования поведения графика линейной функции g(x) при различных значениях параметра с шагом 0.01 показывают, что прямая имеет более двух точек пересечения с графиком функции f(x) при** $a \in (0; 2.26)$

Задача 2. Решение прикладной экономической задачи.

Комната имеет размеры A x B x C см, причем k% занимают оконный и дверной проемы. Необходимо рассчитать, какое количество краски потребуется для проведения ремонтных работ в комнате, если с помощью 1 банки можно закрасить S м^2?

1-й этап. Построение модели. **Для построения математической модели описанного процесса необходимо провести формализацию входных параметров:**

- **форма помещения – прямоугольная (A см – длина, B см – ширина, C см – высота);**
- $(1-k)\ \%$ **– процент окрашиваемой площади;**
- $S_{пов} = 2 \cdot (a \cdot c + b \cdot c) \cdot (1-k) = 2 \cdot c \cdot (a+b) \cdot (1-k)$ **– площадь стен для покраски;**
- $N = округл\left(\frac{S_{пов}}{S}\right)$ **– необходимое количество банок с краской (целое число).**

2-й этап. Разработка вычислительного алгоритма. **Для проведения компьютерного эксперимента по построенной математической модели с помощью табличного процессора MS Excel необходимо построить соответствующую электронную таблицу, задав конкретные числовые значения параметрам задачи. Проведем расчеты полной площади помещения и площади стен под покраску по соответствующим формулам:**

- ✓ **G17 = 2*$C$7*($C$5+$C$6)/10000;**
- ✓ **G18 = =(2*$C$7*($C$5+$C$6)/10000)*(1-$B$11/100).**
- ✓ **Для округления полученного значения N в ячейке B22 до целого числа используем встроенную функцию *ОКРУГЛ*: B22 = ОКРУГЛ($G$18/$B$15;0).**

3-й этап. Проведение расчетов. **Проведем расчеты для определения необходимого количества банок с краской для проведения ремонта в помещении. Будем варьировать параметры задачи и отслеживать влияние этих параметров на конечный результат.**

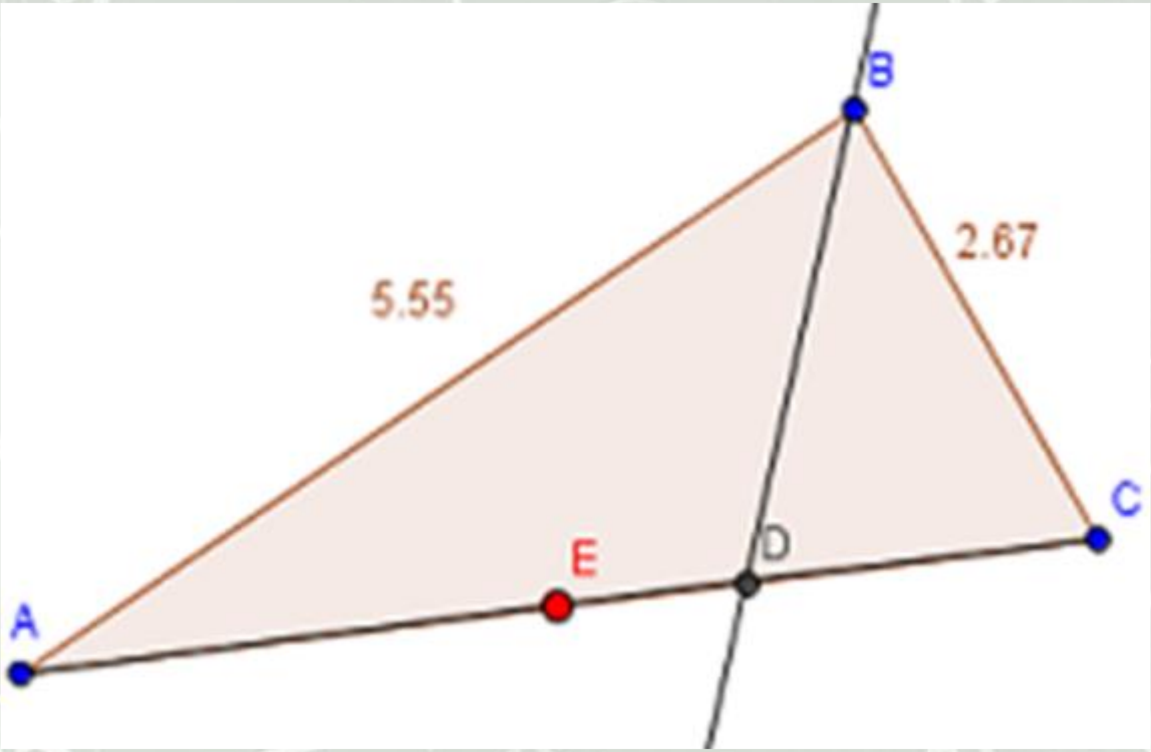
	A	B	C	D	E	F	G	H
1				***Ремонт помещения***				
2								
3	***Размеры помещения***							
4								
5	Длина		400	см				
6	Ширина		500	см				
7	Высота		220	см				
8								
9	***Процент площади, занимаемый оконным и дверным проемами***							
10								
11	K	20	%					
12								
13	***Площадь, окрашиваемая с использованием одной банки краски***							
14								
15	S	4	$м^2$					
16								
17	***Общая площадь помещения***						39,6	$м^2$
18	***Площадь стен под покраску***						31,68	$м^2$
19								
20	***Необходимое количество банок с краской***							
21								
22	N	8	шт.					

4-й этап. Анализ результатов. **Полученный ответ удовлетворяет условию задачи и позволяет определить необходимое количество краски, а также установить взаимосвязь между исходными параметрами задачи. С помощью построенной электронной таблицы также возможно рассчитать количество краски для проведения ремонта в различных помещениях, а добавив дополнительные параметры, можно определить и количество иного материала (например, обоев, клея, ламината, цемента и т.д.).**

Задача 3. Доказательство теоремы.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

1-й этап. Построение модели.

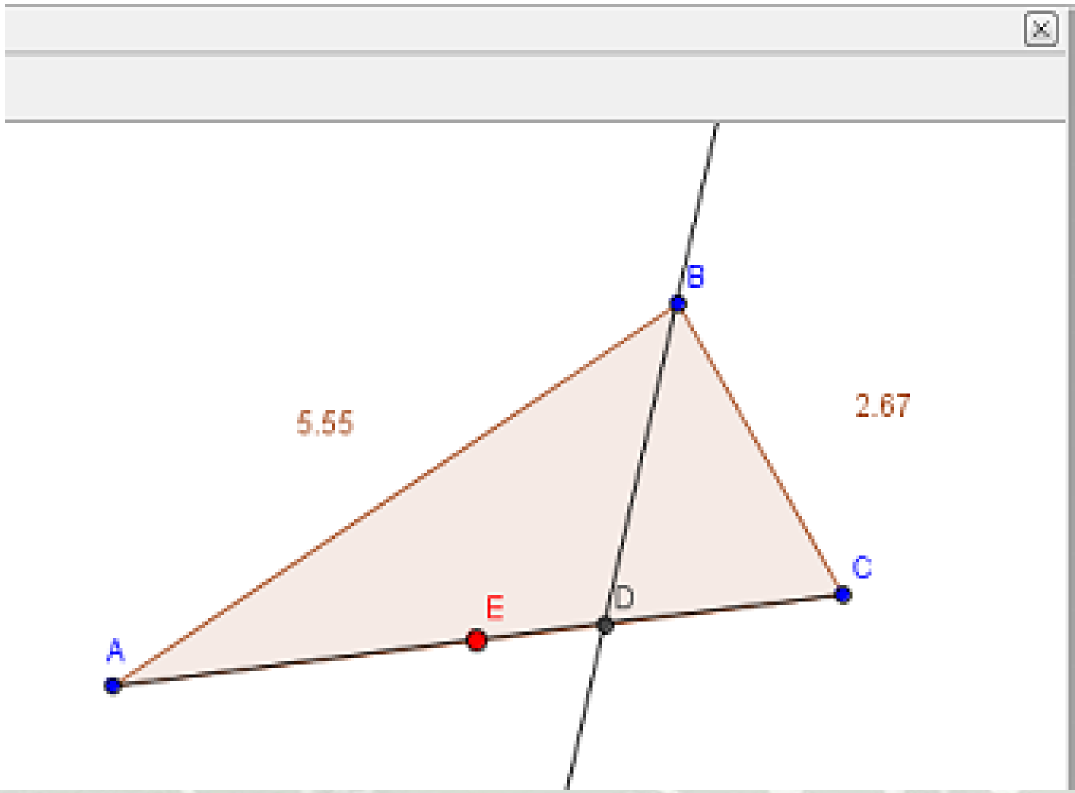


Средством проверки справедливости утверждения на динамической модели являются: точка E – середина AC, выведенные на экран текущие значения длин AB и BC. Перемещая вершину B, можно добиться совмещения точек E и D. Уч-ся делают вывод, что утверждение справедливо для равнобедренных треугольников, где AC является основанием.

В ходе экспериментов с моделью учащиеся могут установить, что отношение отрезков AD и DC как-то зависит от соотношения длин AB и BC, в частности, высказать эту гипотезу в терминах «больше/меньше», что побуждает их к дальнейшему исследованию закономерности.

2-й этап. Разработка вычислительного алгоритма. **В качестве метода для уточнения исходной гипотезы перед учащимися может выступать вычислительный эксперимент. Собранные в электронную таблицу данные о соответственных текущих значениях отрезков AB=c, BC=a, CD=e, AD=f позволяют исследовать отношения длин отрезков, результатом чего является выдвижение гипотезы справедливости равенства:** $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD}$.

Уточнение исходной гипотезы теоремы:



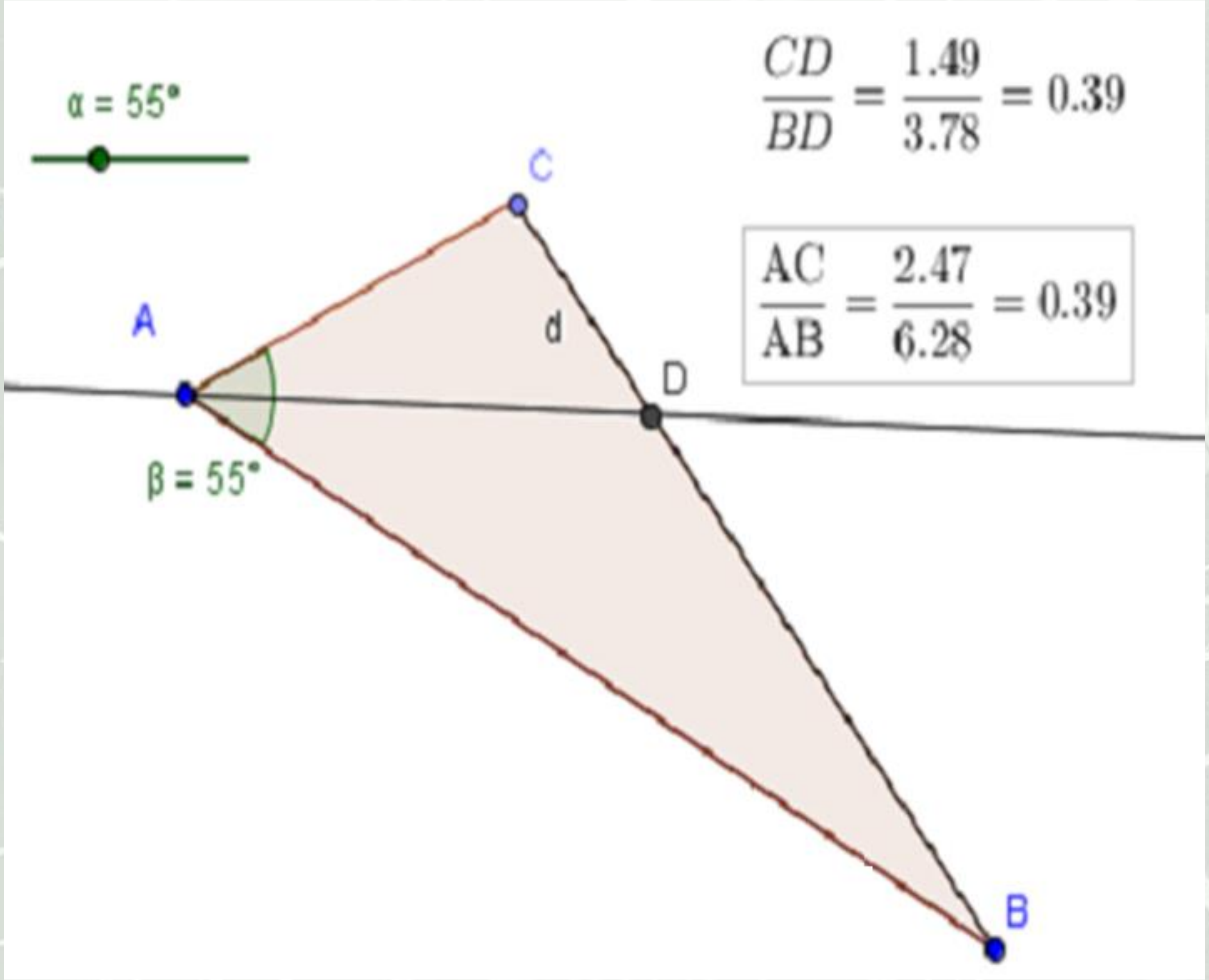
Таблица

	A	B	C	D	E	F
1	a	e	c	f		
2	5.21	3.76	3.2	2.31	1.39	1.39
3	6.15	4.36	2.4	1.7	1.41	1.41
4	6.27	4.42	2.32	1.64	1.42	1.42
5	6.7	4.54	2.24	1.52	1.47	1.47
6	6.77	4.56	2.22	1.5	1.48	1.48
7	6.79	4.57	2.23	1.5	1.49	1.49
8	6.8	4.55	2.27	1.52	1.5	1.5
9	4.42	3.25	3.83	2.81	1.36	1.36
10	2.73	2.01	5.5	4.05	1.36	1.36
11	2.67	1.97	5.55	4.09	1.36	1.36
12						

3-й этап. Проведение расчетов.

В качестве метода для проверки гипотезы выступает контрольный эксперимент, для проведения которого требуется параметрическое задание треугольника (например, по двум сторонам и углу между ними), а также создание динамической надписи, фиксирующей проверяемое соотношение.

Динамический чертеж позволяет проверить устойчивость пропорции относительно изменений каждого из параметров, задающих треугольник, или относительно их случайных сочетаний.



4-й этап. Анализ результатов. **В качестве метода для проверки гипотезы выступает модифицирующий эксперимент. Например, учащимся можно предложить задание: «Проверьте, выполняется ли утверждение, если биссектриса внешнего угла треугольника или ее продолжение пересекает продолжение противоположной стороны, то точка пересечения отстоит от концов этой стороны на расстояния, пропорциональные длинам двух других сторон».**

Задача 4. Площадь фигуры, ограниченной линией.

Вычислить значение площади фигуры, ограниченной осью ОХ и графиком функции $f(x) = 6x - x^2$.

1-й и 2-й этапы. Построение модели. Разработка вычислительного алгоритма. **Для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться геометрическим смыслом определенного интеграла. Для нахождения значения интеграла рассмотрим некоторые методы численного интегрирования, основная идея которых состоит в замене подынтегральной функции на более простую. При этом для оценки значения интеграла вычисляется значение подынтегральной функции в узловых точках. При замене подынтегральной функции на полином нулевой, первой и второй степени получаются соответственно методы прямоугольников, трапеций и Симпсона.**

Метод прямоугольников:

- Разделим отрезок [a;b] точками $x_0, x_1, ..., x_n$ на n равных отрезков длиной $\Delta x = \frac{b-a}{n}$;
  $y_0, y_1, ..., y_n$ – значения функции в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.
- Составим интегральные суммы $y_0\Delta x + y_1\Delta x + ... + y_{n-1}\Delta x$.
- Если функция положительная и возрастающая, то данная сумма приближенно равна значению интеграла $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$ и выражает площадь фигуры, составленной из «входящих»

прямоугольников.

При этом формула $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n)$ выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «выходящих» прямоугольников.

- Чем меньше длина отрезков, на которые делится отрезок [a;b], тем точнее значение, вычисляемое по этой формуле, искомого интеграла.
- Более точное значение интеграла можно получить, если взять в качестве опорной точки для нахождения высоты, точку посередине промежутка.

Метод трапеций:

- Аналогично предыдущему методу разделим отрезок [a;b] точками на n произвольных отрезков.
- На каждом элементарном отрезке заменим (аппроксимируем) подынтегральную функцию на линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями.
- Сумма площадей полученных трапеций даст приближенное значение интеграла на отрезке [a;b].

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

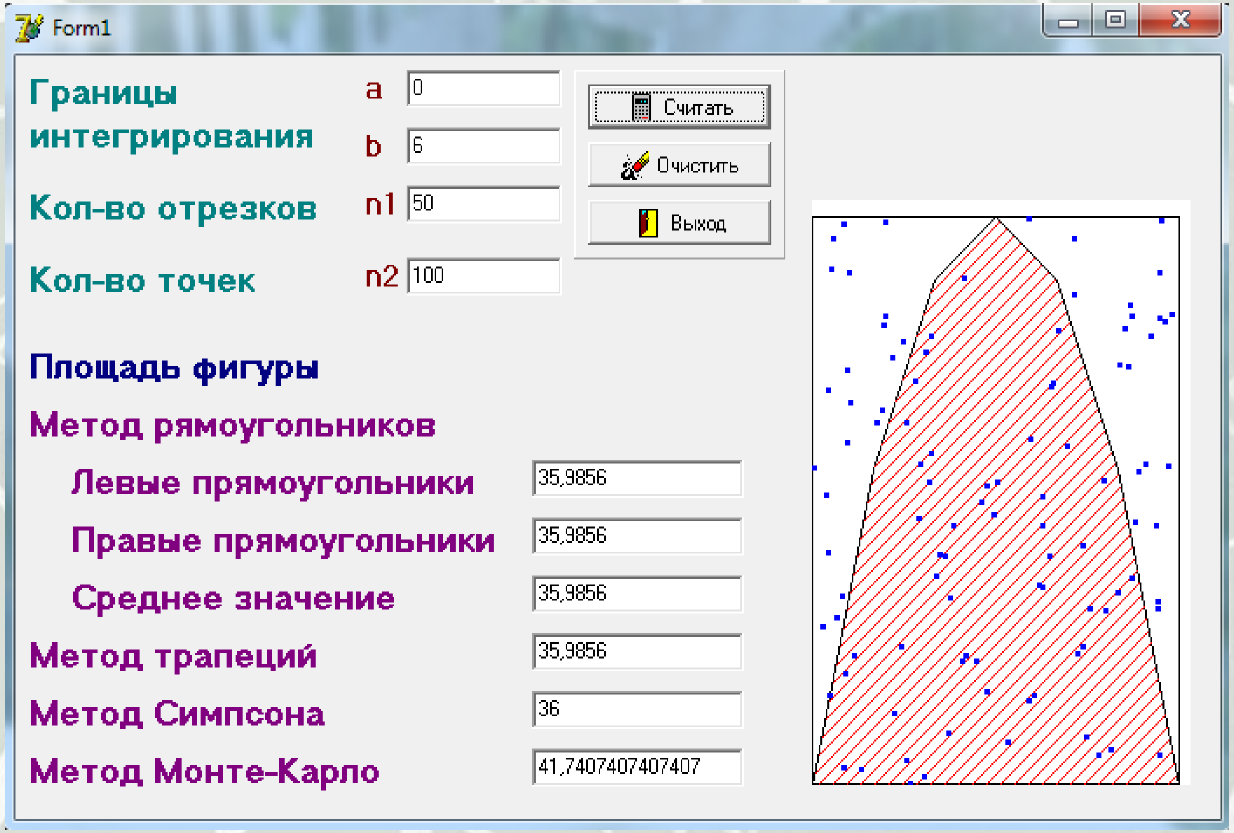
Метод Симпсона:

- ✓ **Если для аппроксимации использовать многочлен второй степени, то на каждом из участков отрезка [a; b] функция заменится на фрагмент параболы.**
- ✓ **Для аппроксимации можно использовать три точки – концы и середину отрезка. Приближенное значение интеграла выражается формулой:** $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

Вероятностный метод Монте-Карло:

- ✓ **«поместим» полученную фигуру в некоторую прямоугольную область;**
- ✓ **задавая случайным образом координаты точек, будем помещать их в пределах этой области;**
- ✓ **отношение числа точек, попавших внутрь фигуры, к общему числу точек примерно равно отношению площади фигуры к площади прямоугольника.**

3-й этап. Проведение расчетов. **Описанные методы реализованы в среде Delphi на языке Object Pascal. Программа позволяет варьировать некоторые параметры эксперимента, а также визуально проследить за его ходом.**



4-й этап. Анализ результатов.

Проведя компьютерный эксперимент с использованием выше перечисленных методов, можно оценить их точность, а также проследить зависимость получаемых результатов от количества отрезков, на которые разбивается интервал (или от количества точек).

Задача 5. Задача с экономическим содержанием.

Предприятие имеет месячный цикл производства. Надо определить, сколько в месяц следует производить краски типа А и сколько – типа Б. Производственные мощности позволяют выпускать в месяц суммарно 500 т краски всех типов. Одна тонна краски А приносит в среднем 2000 руб. прибыли, а одна тонна краски Б – 2500 руб. Отдел маркетинга требует, чтобы краски типа А производилось не менее 200 т в месяц, поскольку есть договоры на такое количество, а краску типа Б нельзя производить более 150 т, поскольку большее количество трудно реализовать. На изготовление красок А и Б необходимо сырье трех видов согласно таблице:

Сырье	Краска А, кг	Краска Б, кг	Месячный запас, т
Сырье 1	50	100	50
Сырье 2	70	80	30
Сырье 3	40	70	25

Сырье	Краска А, кг	Краска Б, кг	Месячный запас, т
Сырье 1	50	100	50
Сырье 2	70	80	30
Сырье 3	40	70	25

1-й этап. Построение модели. **Для построения модели производственной программы необходимо определить производственный план, приносящий максимальную прибыль, т.е. найти максимум функции $Z = 2000x_1 + 2500x_2$ при выполнении ограничений: общее количество краски типов А и Б не должно превышать 500 т; произведенное количество краски А должно быть не меньше 200 т, а краски Б – не более 150т.**

В таблице показано, сколько и какого сырья необходимо для производства одной тонны краски А и одной тонны краски Б, величины месячных запасов сырья. Общее количество используемого сырья не должно превышать их месячные запасы. Таким образом, имеем еще три ограничения – по одному для каждого типа сырья.

2-й этап. Разработка вычислительного алгоритма. **По условию задачи:**

Целевая функция	$Z = 2000\,x1 + 2500\,x2$
Ограничения	
Производственное ограничение:	$x1 + x2 \le 500$
Маркетинговые ограничения:	$x2 \le 150$ $x1 \ge 200$
Сырьевые ограничения:	$0{,}05\,x1 + 0{,}1\,x2 \le 50$ $0{,}07\,x1 + 0{,}08\,x2 \le 30$ $0{,}04\,x1 + 0{,}07\,x2 \le 25$

Необходимо найти максимальное значение целевой функции при выполнении ограничений. Для нахождения корректного решения имеет смысл добавить условие неотрицательности для x_2 ($x_2 \ge 0$).

3-й этап. Проведение расчетов. **Решение задачи в системе компьютерной алгебры Mathematica без использования программирования. Для решения достаточно из условия задачи записать целевую функцию (Z), ограничения (G), указать переменные (V) и выполнить команду NMaximize[{Z,G},V]. В результате на экране мы увидим:**

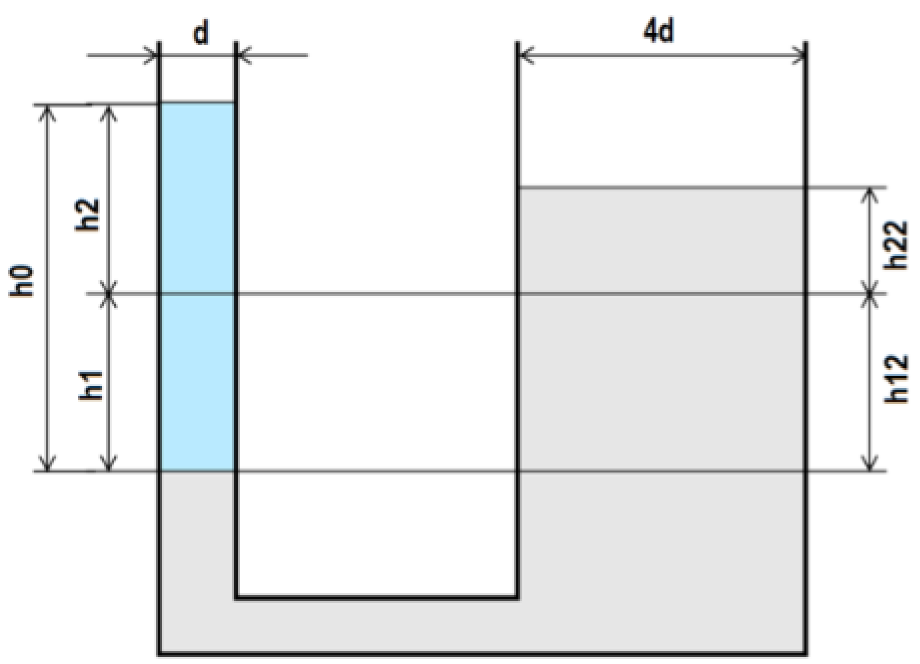
```
In[1]:=Clear[Z,G,V];
Z=2000 x1+2500 x2;G={x1+x2≤500,
x2≤150, 0.05 x1+0.1 x2≤50,
0.07 x1+0.08 x2≤30, 0.04 x1+0.07 x2≤25,
x2≥0, x1≥200 }; V={x1,x2};
NMaximize[{Z,G},V]
Out[1]={889286.,{x1→257.143,x2→150.}}
```

4-й этап. Анализ результатов. **Полученный ответ удовлетворяет условию задачи и показывает, что при выпуске 257,143 т краски типа А и 150 т краски типа Б предприятие получит максимальную прибыль 889 286 руб.**

Задача 6. Решение прикладной задачи по физике.

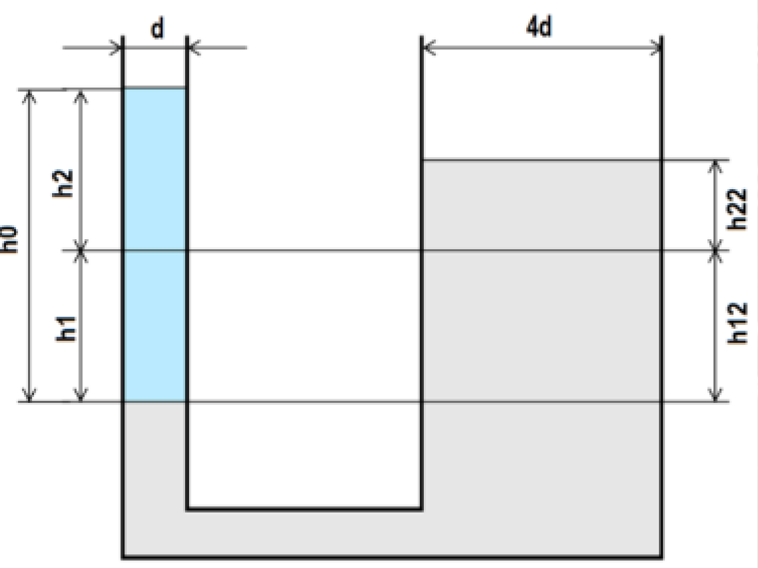
В двух сообщающихся сосудах находится ртуть. Диаметр первого сосуда в четыре раза больше диаметра второго. В первый сосуд наливают воду. Высота столба воды 0,7 м. Определить, на сколько поднимется уровень ртути в одном сосуде и опустится в другом.

1-й этап. Построение модели. Введем обозначения: h_0 = 0,7 м – высота столба воды в первом сосуде, h_1 и h_2 – понижение и повышение уровней ртути в сосудах, h_{12} - расстояние между начальным уровнем ртути и границей раздела воды и ртути в первом сосуде, h_{22} – высота столба воды над начальным уровнем. Изобразим схематично происходящий процесс.



2-й этап. Разработка вычислительного алгоритма. Используя условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах, получим: $\rho_в g h_1 + \rho_в g h_2 = \rho_p g h_{12} + \rho_p g h_{22}$, где

$\rho_в = 10^3 \, кг/м^3$, $\rho_p = 1{,}36 \cdot 10^4 \, кг/м^3$ (1).



Условие несжимаемости, а также дополнительные условия задачи позволяют составить следующие уравнения:

$$S_1 h_1 = S_2 h_{22} \Leftrightarrow d^2 h_1 = 16 d^2 h_{22} \quad (2)$$

$$h_1 + h_2 = h_0 \quad (3)$$

$$h_1 = h_{12} \quad (4)$$

Решим уравнения (1) – (4) совместно относительно неизвестных h_{22} и h_1:

$$h_{22} = \frac{\rho_в \cdot h_0}{17 \cdot \rho_p} \qquad h_1 = \frac{16 \cdot \rho_в \cdot h_0}{17 \cdot \rho_p}$$

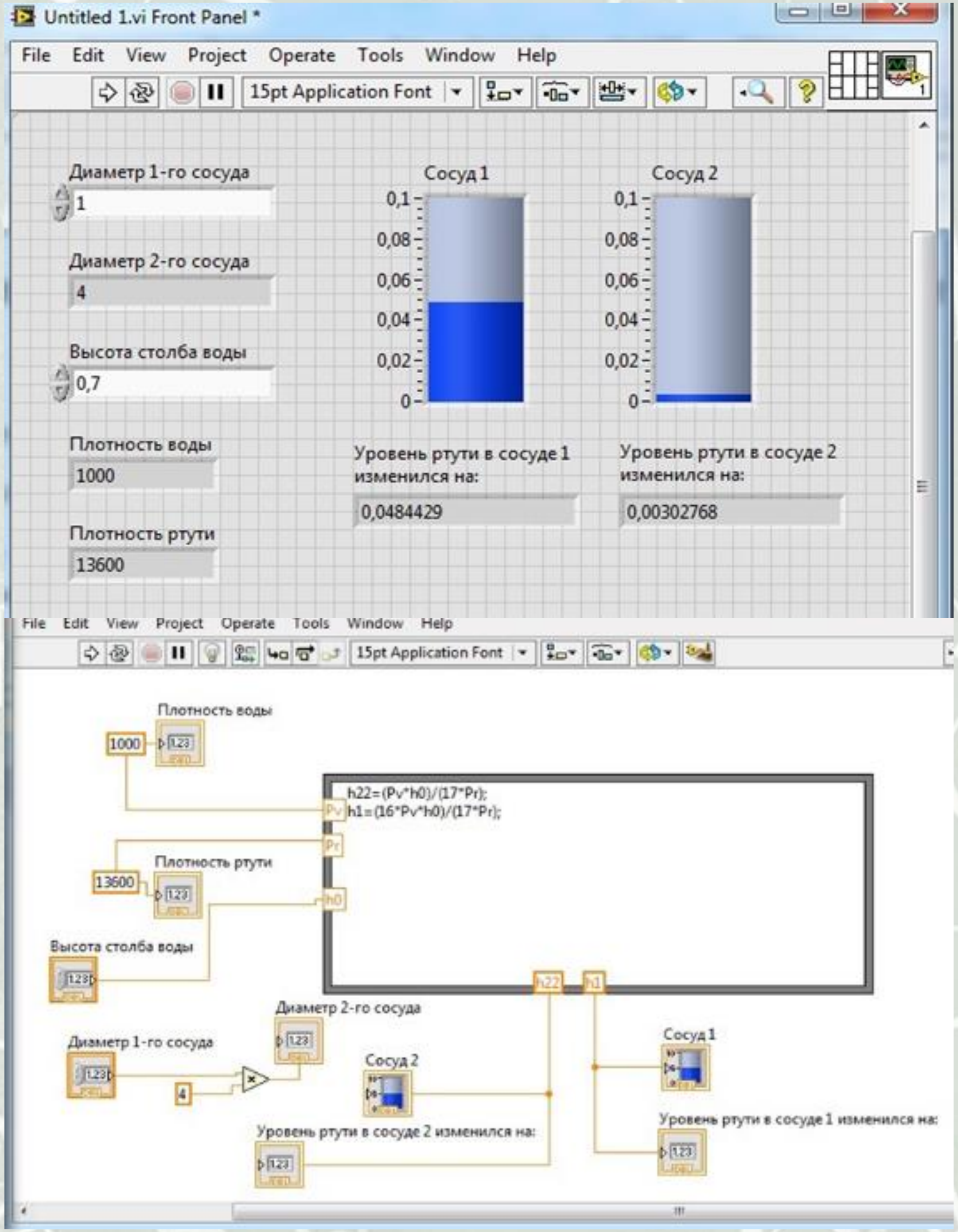
Рассмотрим процесс в среде LabVIEW. **Создадим новый проект. Сформируем интерфейс пользователя. Для этого разместим на лицевой панели следующие элементы:**

- ✓ **два Numeric Control для задания диаметра 1-го сосуда и высоты столба воды;**
- ✓ **пять Numeric Indicator для вывода значений числовых величин;**
- ✓ **два элемента Tank для визуального отображения изменения уровня ртути.**

Формирование блочной диаграммы. **На диаграмме расположены узлы, соответствующие элементам интерфейса. Вычислим величину диаметра второго сосуда с помощью арифметического узла Multiply и числовой константы. Для вывода результата умножения соединим выход узла Multiply с входом соответствующего Numeric Indicator.**

Для решения задачи нужно расположить на диаграмме структуру Formula Node, позволяющую вычислять значения неизвестных согласно значению входящих параметров. Введем в созданную область полученные формулы для вычисления h_{22} и h_1. Создадим на границе области три терминала для ввода необходимых данных: плотности воды, плотности ртути и высота столба воды в первом сосуде. Добавим два терминала для вывода результатов вычислений.

Создадим числовую константу для ввода значения плотности воды. Подсоединим константу к входу числового индикатора, а также к терминалу Formula Node. Аналогичные действия проделаем для ввода значения плотности ртути. Подключим к терминалу области вычислений узел Numeric Control, соответствующий уровню воды в первом сосуде. Терминалы для вывода результатов соединим с узлами Tank и Numeric Indicator.

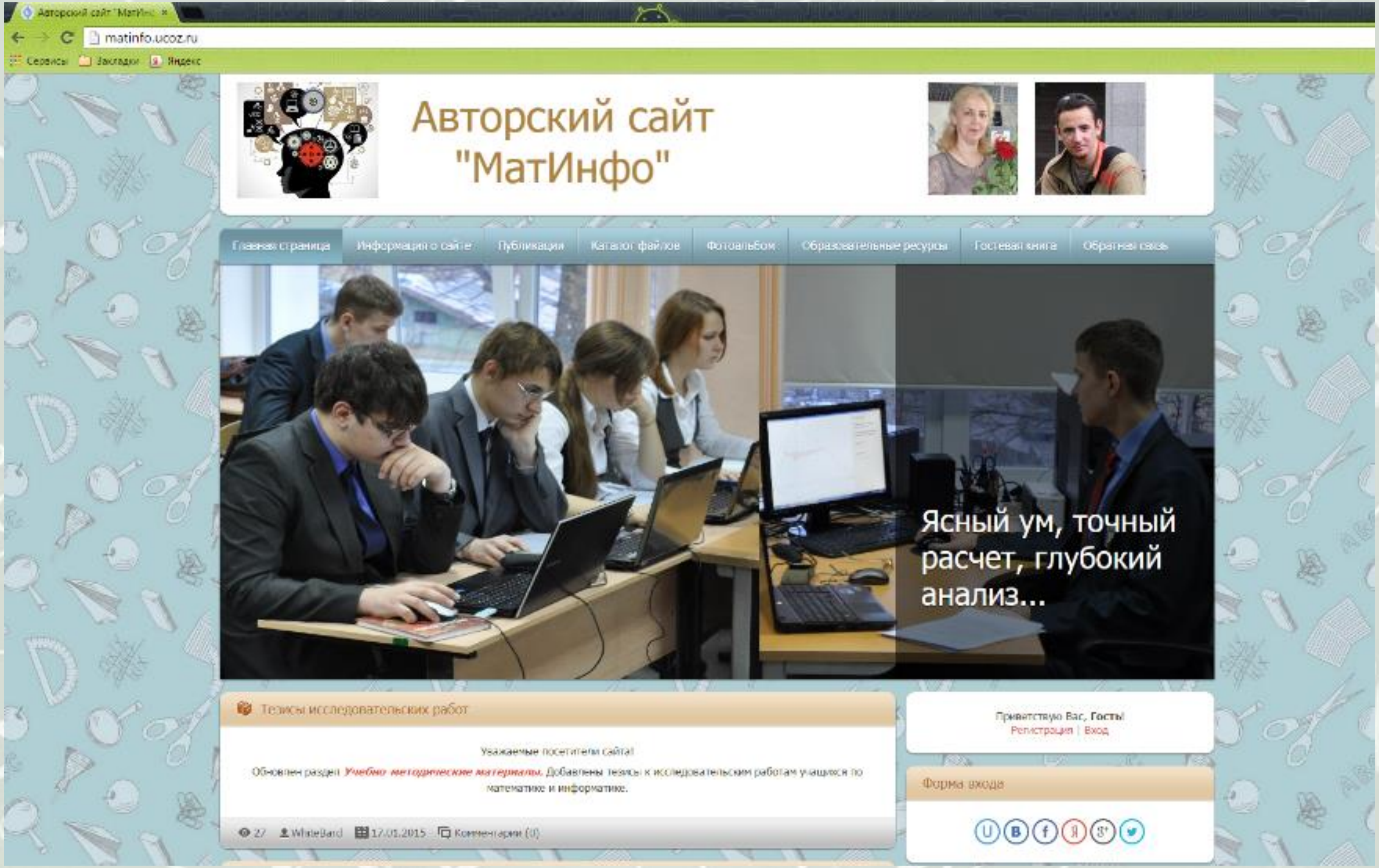


3-й этап. Проведение расчетов. Решение задачи в системе LabVIEW выполняется путем варьирования вводимых значений параметров задачи – диаметра первого сосуда и высоты столба воды. Для решения также необходимо ввести значения плотностей воды и ртути. После ввода всех данных на лицевой панели появятся результаты вычислений, проведенных с помощью созданного алгоритма в среде LabVIEW, и изображение сосудов с полученным уровнем ртути.

4-й этап. Анализ результатов. Полученный ответ удовлетворяет условию задачи и показывает, что при соотношении диаметров сосудов 1 к 4 и добавлении воды в первый сосуд, высотой столба 0.7м уровень ртути в первом сосуде уменьшится на 0,048 м,
а во втором – увеличится на 0,003 м.

Авторский сайт «МатИнфо».

http://матинфо.рф/



Группа ВК «Liceum Anonymous»

https://vk.com/lyceum_anonymous